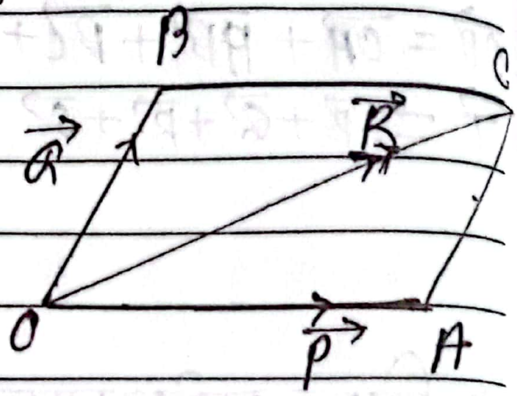
Subject : .... Date : ....

সামান্তরিক সূত্র: যদি কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি সমজাতীয় ভেক্টর একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত হয় তবে এদের লব্ধির মান ও দিক ঐ সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা সূচিত হবে।

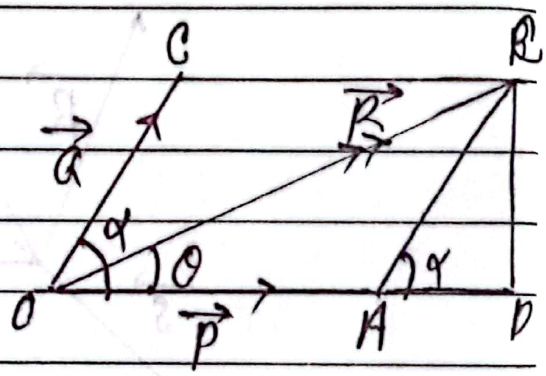


$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

লব্ধির মান নির্ণয়:



$\vec{P}$ এর মান $= |\vec{P}| = P$
$= OA$

$\vec{Q}$ এর মান $= |\vec{Q}| = Q$
$= OC$

$\vec{R}$ এর মান $= |\vec{R}| = R$
$= OC$

$\triangle CAD$ এ, $CD = AC \sin\alpha$
$= Q \sin\alpha$

$AD = AC \cos\alpha$
$= Q \cos\alpha$

এখন, সমকোণী $\triangle ODC$ এ,

$$OC^2 = OD^2 + CD^2$$

Subject : .... Date : ....

$\Rightarrow OC^2 = (OA+AD)^2 + CD^2$

$= (P+Q\cos\alpha)^2 + Q^2\sin^2\alpha$

$= P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2\cos^2\alpha + Q^2\sin^2\alpha$

$\Rightarrow R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\therefore$ লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$

লব্ধির দিক নির্ণয়:

$$\tan\theta = \frac{CD}{OD}$$

$$= \frac{CD}{OA+AD}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

লব্ধির মান ও দিকের কয়েকটি বিশেষ অবস্থা

(i) ভেক্টরদ্বয় একই দিকে ক্রিয়া করলে; অর্থাৎ $\alpha = 0°$ হলে,

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ$

$\Rightarrow R = \sqrt{(P+Q)^2}$

$\Rightarrow R = P+Q$

অর্থাৎ কোনো কণার উপর একই দিকে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টরের লব্ধির মান তাদের যোগফলের সমান এবং এটিই বৃহত্তম লব্ধি।

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : ....

লব্ধি ভেক্টরদ্বয়ের ক্রিয়ারেখা বরাবর ক্রিয়া করবে।

(ii) ভেক্টরদ্বয় বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে ; অর্থাৎ $\alpha = 180^\circ$ হলে।

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ$$

$$\Rightarrow R = P - Q$$

$$\Rightarrow R = P \sim Q$$

অর্থাৎ, কোনো কণার উপর পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টরের লব্ধি তাদের অন্তরফলের সমান এবং এটাই ক্ষুদ্রতম লব্ধি।

লব্ধি বৃহত্তম বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর ক্রিয়া করবে।

(iii) ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, অর্থাৎ $\alpha = 90^\circ$ হলে-

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 90^\circ$$

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

এবং $\tan\theta = \frac{Q\sin 90^\circ}{P + Q\cos 90^\circ}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{Q}{P}$$

(iv) ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান হলে,

$$R^2 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha$$

Subject : .... Date : ....

$\Rightarrow R^2 = 2p^2(1+\cos\alpha)$

$\Rightarrow R^2 = 2p^2 \times 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow R = 2p\cos\frac{\alpha}{2}$

∴ লব্ধির মান = বলের দ্বিগুণ × $\cos\left(\frac{\text{অন্তর্ভুক্ত কোণ}}{2}\right)$

এবং $\tan\theta = \frac{p\sin\alpha}{p+p\cos\alpha}$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{p\sin\alpha}{p(1+\cos\alpha)}$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\alpha}{2}$

∴ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান হলে এদের লব্ধি ভেক্টর দ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(v) লব্ধি কোনো ~~ব~~ ভেক্টরের সাথে লম্ব হলে

JANANI

Subject : .... Date : ....

অর্থাৎ $\theta = 90^\circ$ হলে —

$$\tan 90^\circ = \frac{Q \sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

$$\frac{1}{0} = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow P + Q\cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{P}{Q}$$

$$\alpha = \cos^{-1} -\frac{P}{Q}$$

Shortcut: লব্ধি যে বড় ভেক্টরটির সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে সে ভেক্টরটির মান ছোট হবে এবং;

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-\text{ছোট}}{\text{বড়}}\right)$$

আবার, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\left(-\frac{P}{Q}\right)$

$$\Rightarrow R^2 = P^2 + Q^2 - 2P^2$$

$$\Rightarrow R^2 = P^2 - Q^2$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{P^2 - Q^2}$$

Shortcut: লব্ধি = $\sqrt{\text{বড়}^2 - \text{ছোট}^2}$

JANANI

Subject : .... Date : ....

Topic : সামান্তরিক সূত্র সম্পর্কিত গাণিতিক সমস্যা ও সমাধান

Pbm→01 : দুটি সমমানের ভেক্টরের লব্ধির মান, এদের একটি ভেক্টরের মানের সমান হলে ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

Solⁿ : ধরি, P ও P ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α

$\therefore P^2 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha$

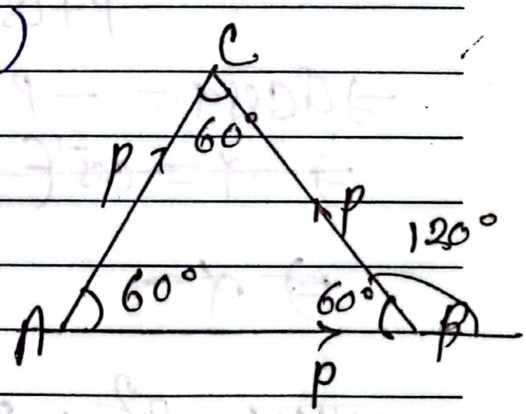
$\Rightarrow -P^2 = +2P^2\cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$ (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি (For MCQ)

$P \wedge P = 120°$



Pbm→02 : কোনো বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়ারত দুটি সমান বলকে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত 9N বলের সাহায্যে ভারসাম্যে রাখা হল। সমান বলদ্বয়ের মান কত?

Solⁿ : ধরি, বলদ্বয় P ও P

JANANI

$\therefore 9^2 = P^2 + P^2 + 2P^2 \cos 60^\circ$

$\Rightarrow 81 = 2P^2 + 2P^2 (\frac{1}{2})$

$\Rightarrow 3P^2 = 81$

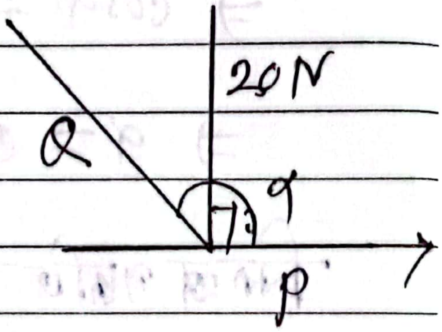
$\Rightarrow P^2 = 27$

$\Rightarrow P = 3\sqrt{3}$ N

∴ সমান বলদ্বয়ের প্রত্যেকের মান $3\sqrt{3}$ N.

Pbm→03: কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R = 20N, যা P এর সাথে সমকোণে ক্রিয়া করে। Q এর 25 N হলে P এর মান কত?

Solⁿ:



$\tan 90^\circ = \frac{Q \sin \alpha}{P + Q\cos\alpha}$

$\Rightarrow Q\cos\alpha = -P$

~~$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(\frac{P}{Q})$~~

~~$\Rightarrow \alpha =$~~

আবার, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\Rightarrow 20^2 = P^2 + 25^2 + (-2P^2)$

$\Rightarrow P^2 = 25^2 - 20^2$

$\Rightarrow P^2 = 125$

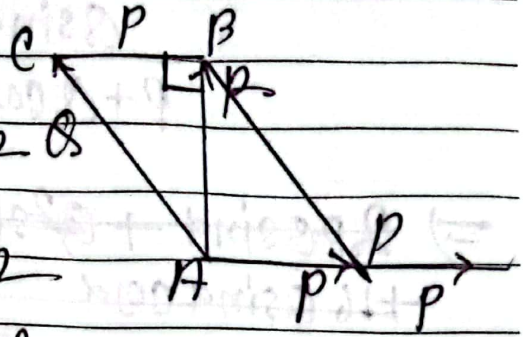
$\Rightarrow P = 15$ N. (Ans.)

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : .... Date : ....

বিকল্প পদ্ধতি



সমকোণী $\triangle ABC$ হতে

পাই $AC^2 = BC^2 + AB^2$

$\Rightarrow BC^2 = AC^2 - AB^2$

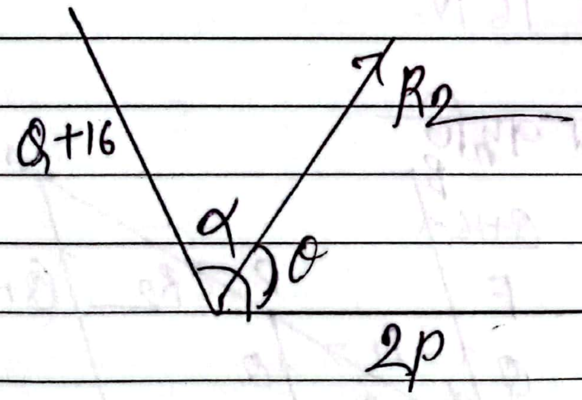
$= 25^2 - 20^2$

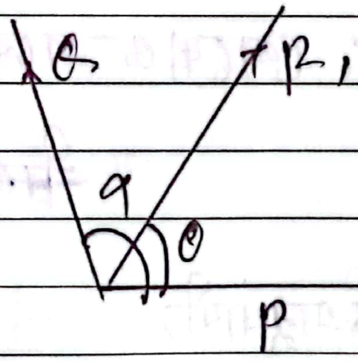
$\Rightarrow BC^2 = 125$

$\Rightarrow P = \sqrt{125} = 15 N.$ (Ans.)

Pbm→04: কোনো বিন্দুতে দুটি বল ক্রিয়ারত। এদের একটির মান দ্বিগুণ করে অপরটিকে 16 একক বৃদ্ধি করা হলে লব্ধির দিক অপরিবর্তনীয় থাকে। শেষোক্ত বলটির মান নির্ণয় কর।

Solⁿ: ১ম পদ্ধতি





১ম ক্ষেত্রে: $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ —— (i)

২য় ক্ষেত্রে: $\tan\theta = \dfrac{(Q+16)\sin\alpha}{2P + (Q+16)\cos\alpha}$ —— (ii)

JANANI

Subject : ....

i ও ii হতেপাই

$$\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} = \frac{(Q+16)\sin\alpha}{2P+(Q+16)\cos\alpha}$$

~~$\Rightarrow 2PQ\sin\alpha + Q^2\sin^2\alpha + Q^2\sin\alpha\cos\alpha + 16Q\sin\alpha + 16Q\sin\alpha\cos\alpha$~~

$$\Rightarrow \frac{Q}{P+Q\cos\alpha} = \frac{(Q+16)}{2P+(Q+16)\cos\alpha}$$

$\Rightarrow 2PQ + Q^2\cos\alpha + 16Q\cos\alpha = PQ + Q^2\cos\alpha + 16P + 16Q\cos\alpha$

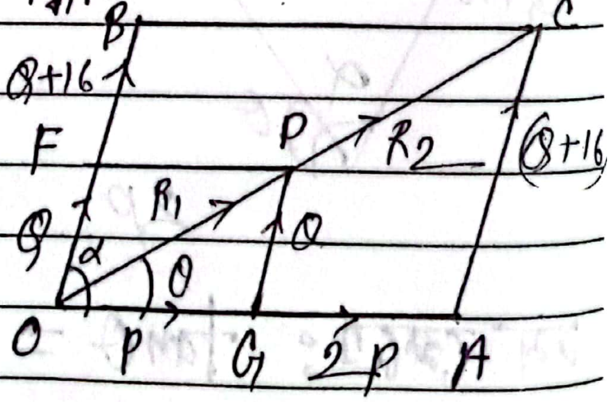
$\Rightarrow 2PQ - PQ = 16P$

$\Rightarrow PQ = 16P$

$\Rightarrow Q = 16$

∴ যোগোক্ত বলের মান 16 N.

~~বিকল্প~~ ২য় পদ্ধতি



চিত্রানুযায়ী,

$$\frac{Q+16}{Q} = \frac{2P}{P}$$

$\Rightarrow Q+16 = 2Q$

$\Rightarrow Q = 16$ N.

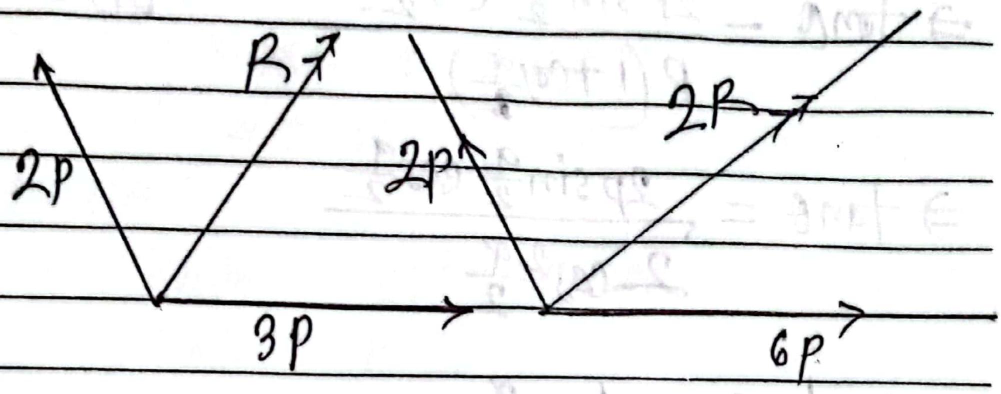
∴ যোগোক্ত বলের মান 16 N.

JANANI

Subject : .... Date : ....

Pbm→05 : কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত 3p ও 2p বলদ্বয়ের লব্ধি R, ১ম বলের মান দ্বিগুণ করলে লব্ধির মানও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?

Soln :



১ম ক্ষেত্রে : $R^2 = 9p^2 + 4p^2 + 12p^2 \cos\alpha$

$R^2 = p^2(13 + 12\cos\alpha)$ — (i)

২য় ক্ষেত্রে : $4R^2 = 36p^2 + 4p^2 + 24p^2\cos\alpha$

$\Rightarrow 4R^2 = p^2(40 + 24\cos\alpha)$ — (ii)

$ii \div i \Rightarrow 4 = \dfrac{40 + 24\cos\alpha}{13 + 12\cos\alpha}$

$\Rightarrow 52 + 48\cos\alpha = 40 + 24\cos\alpha$

$\Rightarrow 24\cos\alpha = -12$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{12}{24} = \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$

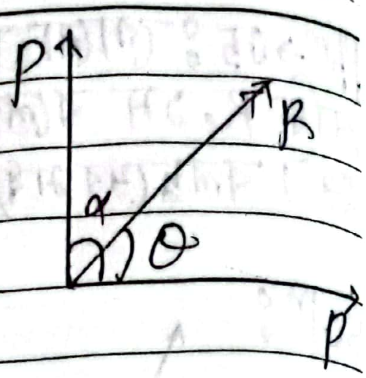
∴ বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 120° (Ans)

Pbm→06 : দেখাও যে, কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টরের মান সমান হলে এদের লব্ধি ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : Date :



$$\tan\theta = \frac{p\sin\alpha}{p + p\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{2p\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{p(1+\cos\alpha)}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{2p\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\alpha}{2}$$

∴ লব্ধি ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

লব্ধির সর্বোচ্চ মান

কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q বলদ্বয়ের লব্ধি R এবং $P \wedge Q = \alpha$ হলে,

লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

R সর্বোচ্চ হবে যখন $\cos\alpha$ এর মান সর্বোচ্চ হয়।

∴ R_{max} হবে যখন $\cos\alpha = 1$

$\alpha = 0^\circ$

$\alpha = 0^\circ$ হলে

$R_{max} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ}$

$R_{max} = P + Q$

JANANI

Scanned with CamScanner

Subject : .... Date : ....

লব্ধির সর্বনিম্ন মান

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

R_{min} হবে যখন,

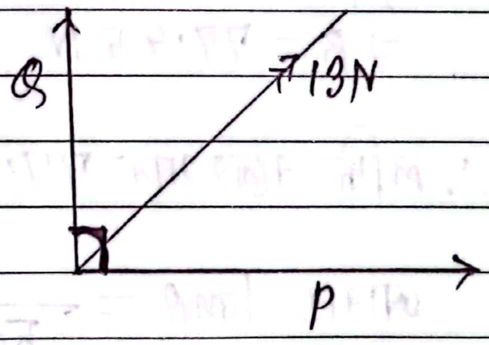
$$\cos\alpha = -1 \text{ (সর্বনিম্ন)}$$
$$\alpha = 180^\circ$$

$\alpha = 180$ হলে,

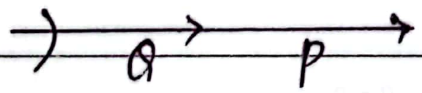
$$R_{min} = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ}$$
$$R_{min} = P - Q$$
$$= P \sim Q$$

অর্থাৎ, $P \sim Q \leq R \leq P + Q$

Pbm→07: কোনো বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 17N। বলদ্বয় সমকোণে ক্রিয়া করলে লব্ধি 13N। বলদ্বয়ের মান নির্ণয় কর।



Soln:



১ম ক্ষেত্রে: $P + Q = 17$
$$P = 17 - Q$$

২য় ক্ষেত্রে: $13^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 90^\circ$
$$\Rightarrow 169 = (17 - Q)^2 + Q^2$$
$$\Rightarrow 169 = 289 - 34Q + Q^2 + Q^2$$
$$\Rightarrow 2Q^2 - 34Q + 120 = 0$$
$$\Rightarrow Q^2 - 17Q + 60 = 0$$

Scanned with CamScanner

Subject : .... Date : ....

$\Rightarrow Q^2 - 12Q - 5Q + 60 = 0$

$\Rightarrow Q(Q-12) - 5(Q-12) = 0$

$\Rightarrow (Q-5)(Q-12) = 0$

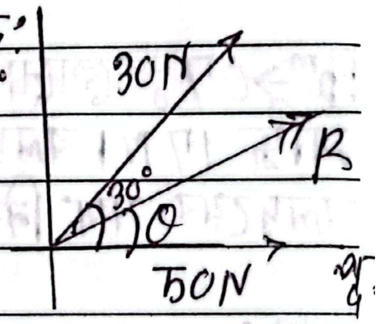
$\therefore Q = 5, 12$

$Q = 5$ হলে, $P = 12$

$Q = 12$ হলে $P = 5$

$\therefore$ বলদ্বয়ের মান ~~5,12~~ 5N ও 12N (Ans.)

Pbm→08: একটি বস্তুকে 50N বল দ্বারা পূর্বদিকে এবং পূর্বদিকের সাথে 30° কোণ করে 30N বল দ্বারা উত্তর দিকে টানা হচ্ছে। লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয় কর।



Solⁿ: $R^2 = 50^2 + 30^2 + 2 \times 50 \times 30 \cos 30^\circ$

$\Rightarrow R^2 = 3400 + 3000 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow R^2 = 5998$

$\Rightarrow R = 77.45 N$

$\therefore$ লব্ধি বলের মান 77.45N

আবার, $\tan\theta = \frac{30\sin 30^\circ}{50 + 30\cos 30^\circ}$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{15}{50 + 15\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \tan\theta = 0.1974$

$\Rightarrow \theta = 11.17^\circ$

$\therefore$ লব্ধি বল পূর্বদিকের সাথে 11.17° কোণ করে উত্তর দিকে ক্রিয়া করছে।

JANANI

Scanned with CamScanner